令和８年度　博士前期課程　工学専攻　電気電子工学プログラム　専門科目

応用数学　解答例

問題１　（配点　２５点）

（１）

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2z\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left\{xz\log\left(y^2\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{3y\cos\left(xz\right)\right\}$$ より

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2z\right) = 2z\frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2z \times 2x = 4xz,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{xz\log(y^2)\right\} = xz\frac{\partial}{\partial y}\left\{\log(y^2)\right\} = xz\frac{2}{y} = \frac{2xz}{y},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{3y\cos(xz)\right\} = 3y\frac{\partial}{\partial z}\left\{\cos(xz)\right\} = 3y\left\{-x\sin(xz)\right\} = -3xy\sin(xz)$$ より

$\underline{\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 4xz + \frac{2xz}{y} - 3xy\sin(xz)}$ となる．

（２）

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}$$ より，それぞれの成分を求めると

x 成分：$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{e^{yz^3}\sin(xy)\right\} = ye^{yz^3}\cos(xy),$

y 成分：$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{e^{yz^3}\sin(xy)\right\} = xe^{yz^3}\cos(xy) + z^3e^{yz^3}\sin(xy),$

z 成分：$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{e^{yz^3}\sin(xy)\right\} = \sin(xy)\frac{\partial}{\partial z}(e^{yz^3}) = e^{yz^3}\sin(xy)\frac{\partial}{\partial z}(yz^3) = 3yz^2e^{yz^3}\sin(xy)$ となるので，

$\underline{\operatorname{grad}\varphi = e^{yz^3}\left[y\cos(xy)\,\boldsymbol{i} + \left\{x\cos(xy) + z^3\sin(xy)\right\}\boldsymbol{j} + 3yz^2\sin(xy)\,\boldsymbol{k}\right]}$ となる．

（３）

ここで，$\boldsymbol{H} = (H_x, H_y, H_z)$ とすると，

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$ となるので，

それぞれの成分を求めると

x 成分：$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(4x + cy + 2z) - \frac{\partial}{\partial z}(bx - 3y - z) = c - (-1) = c + 1,$

y 成分：$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}(x + 2y + az) - \frac{\partial}{\partial x}(4x + cy + 2z) = a - 4,$

z 成分：$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(bx - 3y - z) - \frac{\partial}{\partial y}(x + 2y + az) = b - 2$ となる．

これより，$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = (c+1)\boldsymbol{i} + (a-4)\boldsymbol{j} + (b-2)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$ となり

$\underline{a = 4,\quad b = 2,\quad c = -1}$ を得る．

令和８年度　博士前期課程　工学専攻　電気電子工学プログラム　専門科目

電気回路学　解答例

問題２　(配点　２５点)

（１）

定常状態なので，コイルに起電力は生じない．よって，$i_r(0-)=\dfrac{E}{r}$，$i_R(0-)=\dfrac{E}{R}$

（２）

スイッチを開く直前において，コイルに流れている電流は次のように表される．

$$i_L(0-)=\frac{E}{R}+\frac{E}{r}=\frac{r+R}{rR}E$$

スイッチを開く前後において，コイルの鎖交磁束は連続なので次式が成り立つ．

$$Li_L(0-)=Li_L(0+)$$

よって，

$$i_L(0+)=\frac{R+r}{rR}E$$

（３）

スイッチを開いた後の回路の方程式は次のようになる．

$$L\frac{di_L}{dt}+Ri_L=E$$

微分方程式を解くと，次のようになる．

$$i_L(t)=\frac{E}{R}+I_0\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\quad (I_0\ は定数である)$$

初期条件より，定数 I_0 は次のようになる．

$$I_0=\frac{E}{r}$$

よって，

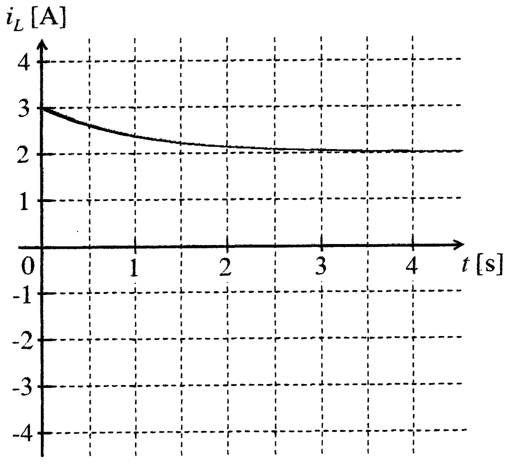
$$i_L(t)=\frac{E}{R}+\frac{E}{r}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\quad ・・・①$$

（４）

$E=2\ \mathrm{V}, R=1\ \Omega, r=2\ \Omega, L=1\ \mathrm{H}$ を式①に代入すると，次のようになる．

$$i_L(t)=2+\mathrm{e}^{-t}=2+\left(\frac{1}{2.7}\right)^t\ [\mathrm{A}]$$

よって，$i_L(t)$ の時間変化の概形は右図のようになる．



（５）

スイッチを開いてから十分な時間が経過した後，コイルに流れる電流 I_L は次のようになる．

$$I_L=2\ \mathrm{A}$$

よって，コイルに蓄えられているエネルギーは，次のようになる．

$$W_L=\frac{1}{2}LI_L^2=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2^2=2\ \mathrm{J}$$

電気磁気学　解答例

問題３　（配点　２５点）

（１）まず，球Ａについて考える．球の外部に生じる電界は球対称であり，球Ｂは十分離れているため，単独に球が存在しているとみなせる．そのため，球Ａの中心から距離rにおける電界E_aは，半径rの球面を閉曲面Sとしてガウスの法則を適用すると，

$$\int_S \varepsilon_0 E_a dS = 4\pi r^2 \varepsilon_0 E_a = Q_a$$

$$\therefore\ E_a = \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

となる．電位の基準は無限遠点であるので，球Ａの電位ϕ_aは，

$$\phi_a = -\int_\infty^a E_a\,dr = \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

となる．同様に球Ｂの電位ϕ_bを求めると，

$$\phi_b = \frac{Q_b}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

を得る．

（２）導線で結んだあとの球Ａ，Ｂに帯電する電荷をQ_a'，Q_b'とする．電荷が移動する前後の球Ａ，Ｂの電荷の総量は保存するので，

$$Q_a + Q_b = Q_a' + Q_b' \quad \text{(i)}$$

となる．また，球Ａ，Ｂを導線で結ぶと，電位が等しくなるので，$\phi_a = \phi_b$である．よって，

$$\frac{Q_a'}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{Q_b'}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

$$\therefore\ \frac{Q_a'}{a} = \frac{Q_b'}{b} \quad \text{(ii)}$$

となる．(i)式と(ii)式より，

$$Q_a' = \frac{a}{a+b}(Q_a + Q_b)$$

$$Q_b' = \frac{b}{a+b}(Q_a + Q_b)$$

と求まる．

（３）円柱状導体の断面積がSで，長さがlなので，問題の式$\boldsymbol{i} = \chi\boldsymbol{E}$は，$\boldsymbol{i}S = \left(\frac{S\chi}{l}\right) l\boldsymbol{E}$と表せる．$\boldsymbol{i}S$の大きさは円柱状導体に流れる電流$I$，$l\boldsymbol{E}$の大きさは円柱状導体の両端の電位差$V$であり，$\boldsymbol{E}$と$\boldsymbol{i}$の方向は一致するので，問題の式は，$I = \frac{1}{R}V$と書ける．$\frac{1}{R} = \frac{S\chi}{l}$は，問題文より定数であるから，問題の式はオームの法則を表す．また，抵抗$R = \frac{1}{\chi}\frac{l}{S}$であるから，$\chi$は円柱状導体の導電率を表す．

研究計画　採点方針

問題４　（配点　２５点）

採点方針は公表しておりません。